o sea, $\qquad 3x + 2y - 11 = 0, \quad y \quad 3x - 2y - 7 = 0.$

El estudiante debe observar que la relación (3) puede obtenerse inmediatamente reemplazando el término constante por cero en el segundo miembro de la ecuación ordinaria (2). (Ver el ejercicio 13 del grupo 32, siguiente.)

EJERCICIOS. Grupo 32

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 3 del Artículo 69.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la hipérbola.

3. Si la ecuación de una hipérbola está dada en la forma

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2,$$

demuéstrese que las coordenadas de sus vértices son $(h+a, k)$, $(h-a, k)$, y que las coordenadas de sus focos son $(h+c, k)$, $(h-c, k)$, siendo $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

4. Emplear la primera ecuación ordinaria de la hipérbola para deducir la siguiente propiedad geométrica intrínseca de la hipérbola: Si el punto O es el centro de una hipérbola cuyos semiejes transverso y conjugado son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la hipérbola a su eje focal, se verifica que

$$\frac{\overline{OQ}^2}{a^2} - \frac{\overline{PQ}^2}{b^2} = 1.$$

5. Por medio de la propiedad intrínseca de la hipérbola, establecida en el ejercicio 4, deducir ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la hipérbola.

6. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-1, 3)$ y $(3, 3)$, y su excentricidad es $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, y de cada lado recto.

7. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, -4)$, y la longitud de su lado recto es 2. Hallar la ecuación de la curva, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

8. El centro de una hipérbola es el punto $(2, -2)$ y uno de sus vértices el punto $(0, -2)$. Si la longitud de su lado recto es 8, hallar la ecuación de la curva, la longitud de su eje conjugado y su excentricidad.

9. Los focos de una hipérbola son los puntos $(4, -2)$ y $(4, -8)$, y la longitud de su eje transverso es 4. Hallar la ecuación de la hipérbola, la longitud de su lado recto y su excentricidad.

10. El centro de una hipérbola es el punto $(4, 5)$ y uno de sus focos es $(8, 5)$. Si la excentricidad de la hipérbola es 2, hallar su ecuación y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.

11. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-3, 2)$ y $(-3, -2)$, y la longitud de su eje conjugado es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

12. Demostrar el teorema 4 del Artículo 69.

13. Demostrar que las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

son $bx + ay - ak - bh = 0$ y $bx - ay + ak - bh = 0$.

En cada uno de los ejercicios 14-18, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, y del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

14. $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$,

15. $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$.

16. $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$.

17. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$.

18. $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$.

19. Resolver el ejercicio 14 por traslación de los ejes coordenados.

20. Hallar el ángulo agudo de intersección de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$.

21. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4, 6)$, tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$.

22. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(3, 2)$ es siempre igual al triple de su distancia a la recta $y + 1 = 0$.

23. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(2, -1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2 = 0$.

24. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es siempre igual al doble del otro.

25. Un observador estacionado en el punto P oye el estampido de un rifle y el golpe de la bala sobre el objetivo en el mismo instante. Demostrar que el lugar geométrico de P es una hipérbola.

70. Propiedades de la hipérbola. Muchas propiedades de la hipérbola están asociadas con sus tangentes. Como la ecuación de una hipérbola es de segundo grado, sus tangentes pueden obtenerse empleando la condición para tangencia discutida en el Artículo 44. Las demostraciones de los teoremas 5 y 6, enunciados a continuación, se dejan como ejercicios al estudiante. Debe comparar estos teoremas con los análogos establecidos para la elipse (Art. 63, teoremas 4 y 5).

TEOREMA 5. *La ecuación de la tangente a la hipérbola*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva es*

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2.$$